PSEUDO-TENSEURS. DENSITÉS ET CAPACITÉS TENSORIELLES.

Nous nous proposons de rappeler les notions de densité et capacité tensorielles, étudiées tout particulièrement par Léon BRILLOUIN. La distinction, parmi les **pseudo-tenseurs**, entre **densités** et **capacités**, n'apporte rien de bien nouveau sur le fond. Elle permet cependant, une meilleure compréhension de certaines questions – tenseur d'orientation, tenseur adjoint, produit vectoriel, volume élémentaire,… – très classiques et toujours fort utiles en physique mathématique.

Les définitions de base de l'algèbre tensorielle sont supposées connues du lecteur.

Notations et rappels.

* Le passage d'une base (e_i) à une nouvelle base $(e_{j'})$, dans l'espace vectoriel E_r de dimension r sur le corps R des réels, se traduit par les relations linéaires :

$$e_{j'} = \sum_{i=1}^{r} A_{j'}{}^{i} \,.\, e_i \qquad e_i = \sum_{j'=1}^{r} A_i{}^{j'} \,.\, e_{j'}.$$

* Avec la **convention d'Einstein**, les formules ci-dessus s'écriront :

$$e_{j'} = A_{j'}{}^{i} \,.\, e_i \qquad e_i = A_i{}^{j'} \,.\, e_{j'}.$$

* Les formules générales de transformation des tenseurs affines, d'ordre p = n+m, attachés à E_r, s'écrivent :

$$t_{i'1i'2\ldots i'n}{}^{j'1j'2\ldots j'm} = A_{j1}{}^{j'1} \,.\, A_{j2}{}^{j'2} \ldots\ldots A_{jm}{}^{j'm} . A_{i'1}{}^{i1} \,.\, A_{i'2}{}^{i2} \ldots\ldots A_{i'n}{}^{in} \,.\, t_{i1i2\ldots in}{}^{j1j2\ldots jm}$$

et

$$t_{i1i2\ldots in}{}^{j1j2\ldots jm} = A_{j'1}{}^{j1} \,.\, A_{j'2}{}^{j2} \ldots\ldots A_{j'm}{}^{jm} \,.\, A_{i1}{}^{i'1} \,.\, A_{i2}{}^{i'2} \ldots\ldots A_{in}{}^{i'n} \,.\, t_{i'1i'2\ldots i'n}{}^{j'1j'2\ldots j'm}$$

i et j variant de 1 à r.

* Ces expressions, prises en un point déterminé, peuvent être utilisées comme relations de définition d'un tenseur.

* Le déterminant des $A_{j'}{}^{i}$, parfois appelé **module** du changement, est noté : $\left|A_{j'}{}^{i}\right| = \mathbf{\Delta}$ et $\left|A_{i}{}^{j'}\right| = 1/\mathbf{\Delta}$.

Les tenseurs antisymétriques.

* Le tenseur affine $t_{i1\ldots in}{}^{j1\ldots jm}$ est antisymétrique par rapport à un couple de deux indices, **tous deux covariants ou contravariants**, i_1 et i_2 par exemple, si :

$$t_{i1i2\ldots in}{}^{j1j2\ldots jm} = - \, t_{i2i1\ldots in}{}^{j1j2\ldots jm}$$

Si $i_1 = i_2$, la composante est nulle.

* L'antisymétrie est une propriété **intrinsèque** du tenseur. Elle se conserve au cours des changements de base, à la condition de ne concerner que des indices de même nature, covariants ou contravariants, obéissant aux mêmes formules de changements.

* Pour cette raison, un tenseur **complètement** antisymétrique, c'est-à-dire antisymétrique par rapport à tous ses indices, est totalement covariant ou contravariant.

Sur les r^n composantes du tenseur covariant complètement antisymétrique $t_{i1i2\ldots in}$, $C_r^n = r!\,/\,n!.(n-r)!$ – le nombre des combinaisons constituées par les valeurs différentes des n indices choisies parmi les r possibles – au plus, sont algébriquement indépendantes.

<u>* Exemple</u> : le tenseur $t_{\alpha\beta}$ deux fois covariant dans l'espace à 3 dimensions E_3 :

$$t_{\alpha\beta} = - t_{\beta\alpha}.$$

Les composantes t_{12}, t_{13}, t_{23}, à priori indépendantes, telles que $\alpha<\beta$, sont appelées composantes **strictes** du tenseur $t_{\alpha\beta}$.

Elles sont bien au nombre de : $C_3^2 = 3!/2!.1! = 3$.

* L'ensemble des tenseurs complètement antisymétriques, attachés à l'espace vectoriel E_r et n fois contravariants est appelé **algèbre extérieure** d'ordre n sur E_r.

On démontre – B 2 – que cette algèbre extérieure est un sous-espace vectoriel de dimension C_r^n (égal au nombre des composantes strictes) de l'espace vectoriel $E^{n\otimes}$ ($E^{n\otimes}$ étant le produit tensoriel de n espaces E_r) des tenseurs affines n fois contravariants sur E_r^n (E_r^n étant l'ensemble produit de n espaces E_r). Chacun de ses éléments est appelé **élément d'algèbre extérieure** d'ordre n.

* De même pour l'ensemble des tenseurs complètement antisymétriques n fois covariants. Mais dans ce cas, l'algèbre extérieure est un sous-espace vectoriel, de dimension C_r^n, de l'espace vectoriel $E_r^{*n\otimes}$ des tenseurs affines n fois covariants sur E_r^{*n}. (E_r^* dual de Er.) Ses éléments sont appelés **formes extérieures** d'ordre p.

Les tenseurs complètement antisymétriques d'ordre égal à la dimension de l'espace.

Nous commencerons par étudier le cas des tenseurs du 3ème ordre, attachés à E_3, avant de généraliser aux tenseurs d'ordre r, attachés à E_r.

- Le tenseur covariant complètement antisymétrique d'ordre 3 et attaché à E_3 : t_{i1i2i3}.

* Il admet $3^3 = 27$ composantes, dont 21 nulles – celles pour lesquelles 2 ou 3 indices sont égaux – et une seule ($C_3^3 = 1$) composante stricte t_{ijk}. Les 5 autres composantes sont égales à $\pm\, t_{ijk}$.

AVERTISSEMENT *: les pages 3, 5 et 7 sont indisponibles. Contacter l'auteur.*

* Nous obtenons des **densités** ou **capacités tensorielles** (notées D_t ou C_t) en multipliant des densités ou capacités scalaires (notées D_s ou C_s) par des tenseurs :

$$\mathbf{D_{t\,i1}{}^{j1j2} = D_s \,.\, t_{i1}{}^{j1j2}} \qquad \text{et}$$

$$\mathbf{C_{t\,i1}{}^{j1j2} = C_s \,.\, t_{i1}{}^{j1j2}.}$$

* Les règles de transformation, étudiées précédemment s'appliquent aux produits :

$$D_{t\,i'1}{}^{j'1j'2} = \mathbf{\Delta} \,.\, A_{j1}{}^{j'1} \,.\, A_{j2}{}^{j'2} \,.\, A_{i'1}{}^{i1} \,.\, D_{t\,i1}{}^{j1j2}$$

$$C_{t\,i'1}{}^{j'1j'2} = (\mathbf{1/\Delta}) \,.\, A_{j1}{}^{j'1} \,.\, A_{j2}{}^{j'2} \,.\, A_{i'1}{}^{i1} \,.\, C_{t\,i}{}^{1j1j2}.$$

* Densités et capacités tensorielles sont des **pseudo-tenseurs** ou tenseurs **axiaux comodulaires** ou **contramodulaires** qui diffèrent par le rôle de **Δ** lors des changements de bases. Les pseudo-tenseurs se transforment suivant les formules ci-dessus.

* Il est aussi évident que le produit d'une densité par une capacité donne un tenseur **« vrai »**.

Remarque : *les densités et capacités scalaires et tensorielles définies ci-dessus, sont dites de poids 1. Si le déterminant* **Δ** *intervient dans les formules par sa puissance* $\mathbf{\Delta}^p$*, elles sont alors de poids p.*

Le tenseur de Lévi-Civita.

* Considérons le tenseur, complètement antisymétrique, attaché à E_r et r fois covariant : $t_{i1i2\ldots ir}$. Ses composantes s'écrivent : $t_{i1i2\ldots ir} = \boldsymbol{\varepsilon}_{i1i2\ldots ir} \,.\, t_s$.

$t_{i1i2\ldots ir}$ est un tenseur, t_s une densité scalaire.

Il en résulte que $\boldsymbol{\varepsilon}_{i1i2\ldots ir}$ est un pseudo-tenseur et plus précisément, une capacité tensorielle, qui se transforme suivant la formule :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i'1i'2\ldots i'r} = (1/\Delta) \,.A_{i'1}{}^{k1} \,.\, A_{i'2}{}^{k2} \ldots .A_{i'r}{}^{kr} \,.\, \boldsymbol{\varepsilon}_{k1k1\ldots kr}.$$

* Si l'on utilise le résultat du calcul des déterminants :

$$A_{i'1}{}^{k1} \,.\, A_{i'2}{}^{k2} \ldots A_{i'r}{}^{kr} \,.\, \boldsymbol{\varepsilon}_{k1k2\ldots kr} = (-1)^p.\mathbf{\Delta}$$

p étant la parité de la permutation (i'_1, i'_2 … i'_r), on vérifie bien que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i'1i'2\ldots i'r} = (-1)^p.$$

* De même, $\boldsymbol{\varepsilon}^{j1j2\ldots jr}$ est une densité tensorielle contravariante, qui se transforme suivant la formule :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{j'1j'2\ldots j'r} = \mathbf{\Delta} \,.\, A_{l1}{}^{j'1} \,.\, A_{l2}{}^{j'2} \ldots .A_{lr}{}^{j'r} \,.\, \boldsymbol{\varepsilon}^{l1l2\ldots lr}.$$

* Lors d'un changement de base, le changement de l'orientation (ou du sens) de la base se traduit par un déterminant $\Delta < 0$. Le tenseur d'orientation η est bien lié à **l'orientation de la base.**

<u>Remarque</u> : *dans un espace complètement euclidien,* g>0. *Il n'est donc plus nécessaire de prendre la valeur absolue de* g *:* $|g|$. *Si de plus nous ne considérons que les changements de base pour lesquels* $\Delta>0$, *alors* $\sqrt{g}$ *et* $1/\sqrt{g}$ *sont des pseudo-scalaires (respectivement densité et capacité) et* η *est un tenseur complètement antisymétrique euclidien dont les composantes strictes covariantes et contravariantes sont reliées par la relation :*

$$\eta_{12\ldots r} = \sqrt{g} = g\,.\,\eta^{12\ldots r}$$

Le tenseur adjoint d'un tenseur complètement antisymétrique d'ordre n.

C'est le produit contracté du tenseur considéré par η/n!.

$$t^{Ad}{}_{i_{n+1}\ldots i_r} = \eta_{i_1\ldots i_n\, i_{n+1}\ldots i_r}\,.\,t^{i_1\ldots i_n}$$
$$= (1/n!)\,.\,\sqrt{|g|}\,.\,\varepsilon_{i_1\ldots i_n\, i_{n+1}\ldots i_r}\,.\,t^{i_1\ldots i_n} \quad \text{et}$$

$$t^{Ad\, i_{n+1}\ldots i_r} = (1/n\,!)\,.\,\eta^{i_1\ldots i_n\, i_{n+1}\ldots i_r}\,.\,t_{i_1\ldots i_n}$$
$$= \frac{1}{n!}\,.\,\frac{1}{\sqrt{|g|}}\,.\,\varepsilon^{i_1\ldots i_n\, i_{n+1}\ldots i_r}\,.\,t_{i_1\ldots i_n}.$$

Le produit contracté $(1/n\,!).\varepsilon\,.\,t$ est une capacité ou une densité tensorielle qui, multipliée par $\sqrt{|g|}$ ou $\frac{1}{\sqrt{|g|}}$ donne un **« faux » tenseur**, d'ordre r-n, qui se transforme, <u>au signe prés</u> lorsque $\Delta < 0$, comme un tenseur du même ordre complètement antisymétrique.

Par exemple : $t^{Ad}{}_{i'_{n+1}\ldots i'_r} = (\text{signe de } \Delta)\,.\,A_{i'_{n+1}}{}^{i_{n+1}}\ldots A_{i'_r}{}^{i_r}\,.\,t^{Ad}{}_{i_{n+1}\ldots i_r}$.

Le produit vectoriel de deux vecteurs contravariants X et Y dans l'espace euclidien E_3.

* Le produit extérieur ou bivecteur de X et Y est le tenseur contravariant complètement antisymétrique d'ordre 2 : $P^{ij} = x^i\,.\,y^j - x^j\,.\,y^i$.

* La multiplication contractée par le tenseur d'orientation $\eta_{ijk} = (1/2!)\,.\,\varepsilon_{ijk}\,.\,\sqrt{|g|}$ peut être décomposée en :

- la multiplication contractée par $(1/2!)\,.\,\varepsilon_{ijk}$ qui donne une capacité vectorielle covariante de composantes $P_k = P^{ij}$;

$$\mathbf{dv'} = \sqrt{g'}\,.\mathbf{d\tau'} = |\Delta|\,.\sqrt{g}\,.\frac{\mathbf{d\tau}}{\mathbf{\Delta}} = (\text{signe de } \Delta).\mathbf{dv}.$$

dv est un « **faux** » **scalaire**, invariant comme un scalaire, au signe prés lorsque Δ<0.

Masses et charges électriques volumiques.

* La quantité de matière dm (ou d'électricité dq) contenue dans l'élément $\mathbf{d\tau}$ est égale à :dm = $D_m.\mathbf{d\tau}$ (ou dq = $D_e.\mathbf{d\tau}$).

C'est évidemment un scalaire qui est donc le produit de la capacité scalaire $\mathbf{d\tau}$ par D_m (ou D_e) qui est une densité scalaire (de masse ou d'électricité).

D_m se transforme suivant : $D'_m = \Delta.D_m$.

* dm = $\frac{D_m}{\sqrt{g}}$.**dv** est aussi égale au produit de deux faux scalaires **dv** et $\frac{D_m}{\sqrt{g}}$.

Les masses ou charges électriques volumiques, définies classiquement par : $\frac{dm}{|dv|}$ (ou $\frac{dq}{|dv|}$) sont égales aux scalaires : $\rho = \frac{|D_m|}{\sqrt{g}}$ (ou $\frac{|D_e|}{\sqrt{g}}$).

Bibliographie.

(1) L. Brillouin. Les Tenseurs en Mécanique et en Elasticité. Editions Jacques Gabay. (Réédition.)1987

(2) A. Delachet. Le calcul tensoriel. Collection Que sais-je ? P.U.F. 1969

(3) L. Landau et E. Lifchitz. Théorie du Champ. Editions Mir. 1966

(4) A. Lichnerowicz. Eléments de calcul tensoriel. Collection Armand Colin. 1962

(5) J. Sivardière. Les grandeurs physiques axiales. BUP N°709. Décembre 1988