

NEWTON, FEYNMAN et le problème inverse

RÉSUMÉ

Nous rappelons tout d'abord les définitions et quelques éléments des problèmes direct et inverse de KÉPLER, traités par NEWTON dans les premières sections des *Principia*. Puis, après avoir repris quelques propriétés de l'ellipse, nous exposons dans le détail, la solution géométrique de FEYNMAN au problème inverse. Nous proposons ensuite une autre démonstration géométrique qui utilise des transformations géométriques élémentaires et la podaire de la trajectoire par rapport au centre des forces.

INTRODUCTION

Une publication relativement récente, « *Le mouvement des planètes autour du soleil. Le cours perdu de Richard FEYNMAN* » [1], qui n'est autre que la traduction en français d'un petit ouvrage écrit à partir d'enregistrements et de notes d'un cours oublié de FEYNMAN datant de 1964, suggère de revenir – très partiellement ! – sur les travaux, en mécanique, d'Isaac NEWTON.

1. LES PRINCIPIA

Dans les *Principia*, appellation abrégée en latin de *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* [2], NEWTON expose sa théorie du mouvement des corps et sa conception du système du monde. L'œuvre, immense, est à l'origine de la science moderne dont elle a posé les fondements et fixé les méthodes. La première édition des trois livres qui la composent date de 1687 ; les deux éditions suivantes qui sortiront en 1713 et 1726 reflèteront l'évolution de la pensée de Newton sur certaines questions, l'approximation circulaire par exemple, présentée récemment dans le BUP [3]. Rappelons que le *Livre I* est consacré aux lois et à des propositions générales sur le mouvement des corps ; le *Livre II* considère le mouvement des différents corps dans des milieux résistants ; enfin, le *Livre III* traite du système du monde.

Ces ouvrages ont été précédés par une série de petits traités dont le titre commun est *De motu* (« Sur le mouvement »). Ce sont des versions très simplifiées des *Principia* – les premiers manuscrits contiennent seulement quatre théorèmes et quatre problèmes – qui seront corrigées et considérablement enrichies de 1684 à 1687 pour aboutir aux presque deux cents propositions sur plus de cinq cents pages des *Principia*.

La lecture des *Principia* est ardue. Ils sont tellement difficiles à aborder que même FEYNMAN n'a pas hésité, pendant le cours « perdu » et après avoir exposé la démonstration de la loi des aires (*Proposition I*), à reconnaître devant ses étudiants qu'il n'avait pas réussi à suivre plus loin l'argumentation de NEWTON. Sans doute, ce prix Nobel de physique ne s'est-il pas donné le temps de comprendre et approfondir les propositions suivantes. Il n'a pas eu non plus la chance de pouvoir disposer des éclaircissements apportés par des publications telles que celle d'un autre prix Nobel de physique, Subrahmanyan CHANDRASEKHAR. Ce dernier a repris dans un beau livre – *Newton's Principia for the Common Reader* – [4], avec

des termes et une présentation modernes, de nombreuses démonstrations des *Principia*. Les caractéristiques de l'une d'elles (la *Proposition X*) y sont qualifiées d'étincelantes mais obscurcies par le style « jamésien »⁽¹⁾ de NEWTON dont les développements mathématiques sont écrits en prose continue. Cette remarque explique certainement une telle reprise quasi exhaustive des Principes Mathématiques et ce désir de les rendre accessibles à tous les lecteurs non spécialisés.

2. NEWTON ET LE PROBLÈME DIRECT

Dans le *Livre I*, NEWTON commence par donner la définition de quelques grandeurs physiques : masse, quantité de mouvement, force ... avant de poser ses trois lois ou axiomes du mouvement complétés par six corollaires :

➤ *Principe d'inertie* : tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état ;

➤ *Loi de la dynamique* : les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice, et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée ;

➤ *Principe d'action et réaction* : l'action est toujours égale et opposée à la réaction ; c'est-à-dire, que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales, et dans des directions contraires.

L'importance du premier corollaire justifie le rappel de son énoncé :

➤ *Corollaire 1* : un corps poussé par deux forces parcourt, par leurs actions réunies, la diagonale d'un parallélogramme dans le même temps, dans lequel il aurait parcouru ses côtés séparément.

Puis l'auteur présente le calcul des fluxions ou « méthode des premières et dernières raisons » qu'il utilise fréquemment dans « tout cet ouvrage » et qui s'apparente au calcul différentiel mais dans le domaine géométrique. Il s'attaque ensuite à la résolution du problème qui, selon la terminologie ancienne, en vigueur au XVIII^{ème} siècle, est qualifié de « **direct** ».

Il s'agit de trouver la loi de force centrale en connaissant le mouvement du corps attiré vers le centre de force. Le problème direct de KÉPLER concerne, plus précisément, les planètes dont on connaît le mouvement par les trois lois qu'il a établies à partir des observations de TYCHO BRAHÉ et qu'il est utile, pour la suite, de rappeler :

AVERTISSEMENT

Les pages 3, 5, 8 à 10, 12,13,16 et 17 sont indisponibles. Contacter l'auteur.

*Cet article a été publié dans le **Bup** (Bulletin de l'Union des Professeurs de physique et chimie) n° 965 de juin 2014.*

(1) Du nom du romancier anglais d'origine américaine Henry JAMES.

Ces différentes étapes du *Livre Premier* sont à situer dans la démarche générale de NEWTON qui cherchait à répondre à la question que lui avaient posée successivement HOOKE puis HALLEY, ce dernier, au cours d'une visite à Cambridge vers le milieu de l'année 1684, lui ayant demandé : « Quelle serait à son avis la courbe qui serait décrite par les planètes en supposant que la force d'attraction vers le soleil est réciproque au carré de leur distance à celui-ci. » En réponse, NEWTON lui avait adressé, en novembre de la même année, un texte qui est considéré comme le premier exemplaire du *De motu* dont on sait qu'il constituait le noyau initial des *Principia*.

En réalité, *De motu* comme les premières propositions des *Principia*, en donnant la solution du problème direct ne répondent pas vraiment à la question posée qui est celle du « problème **inverse** » de KÉPLER, c'est-à-dire retrouver la loi des ellipses et plus généralement des coniques en partant de la force centrale en $1/r^2$.

3. NEWTON ET LE PROBLÈME INVERSE

Ce passage de la loi de force à la trajectoire est une entreprise beaucoup plus difficile que le problème direct. Il est en effet plus aisé de raisonner sur la trajectoire connue que de construire l'objet géométrique à partir de la loi de force.

NEWTON aborde cette question à plusieurs reprises mais sans vraiment convaincre de nombreux auteurs. Ce qui a donné lieu à d'interminables débats, qui se poursuivent encore aujourd'hui, pour savoir si oui ou non il avait bien répondu au problème posé. Plusieurs raisons expliquent les doutes soulevés par les réflexions de NEWTON à ce propos. Nous en donnerons quelques exemples empruntés aux études de deux historiens des sciences.

François DE GANDT, dans son étude du problème **inverse** [7] cite Jean BERNOULLI qui, dans une lettre à LEIBNIZ, remarquait que la réciproque de la *Proposition X* : « *La force est donc comme la distance du corps au centre de l'ellipse ; et réciproquement, si la force est comme la distance, le corps décrira, ou une ellipse dont le centre sera le même que le centre des forces, ou le cercle dans lequel l'ellipse peut se changer.* » était affirmée sans démonstration.

Il remarque également que dans le *Corollaire 2* de la *Proposition LVIII* : « *Deux corps qui s'attirent avec des forces réciproquement proportionnelles au carré de leur distance décriront, par les Propositions XI – XIII, autour de leur commun centre de gravité, et autour l'un de l'autre, des sections coniques dont le foyer sera dans le centre autour duquel ces figures sont décrites ; et réciproquement si de telles figures sont décrites, les forces centripètes seront réciproquement proportionnelles au carré de la distance.* », NEWTON invoque les propositions solutions du problème direct comme si elles avaient répondu au problème inverse.

Il signale aussi une ébauche de discussion, restreinte au cas des coniques, dans le *Corollaire 1* de la *Proposition XIII* et à propos duquel, il faut citer l'article de Bruce POURCIAU [8] qui étudie l'argumentation de NEWTON pour la résolution du problème inverse effectuée en quelques lignes de ce corollaire et cherche à montrer que la démonstration est correcte.

sous-tendus par des angles égaux qui tendent ainsi vers zéro, les deux diagrammes tendent vers les courbes lisses : la trajectoire réelle pour l'un, le cercle circonscrit (H) pour l'autre.

En même temps, nous remarquons qu'au passage à la limite, du polygone de l'orbite vers la trajectoire réelle, lorsque M_2 et M_N (avec $N \rightarrow \infty$) tendent vers M_1 , les vecteurs vitesse $\overline{\mathbf{v}}_1$ et $\overline{\mathbf{v}}_N$, portés par M_1M_2 et M_NM_1 tendent vers la vitesse instantanée $\overline{\mathbf{v}}_0$ en M_1 (cf. **Figure 6**), tangente à l'orbite et, par symétrie, perpendiculaire à SM_1 .

Retenons également pour la suite que (cf. **Figures 5 et 6**) : $\overline{\mathbf{O}'\mathbf{V}}_1 = \overline{\mathbf{O}'\mathbf{V}}_N + \overline{\mathbf{V}}_N\overline{\mathbf{V}}_1$ ou encore : $\overline{\mathbf{v}}_1 = \overline{\mathbf{v}}_N + \overline{\Delta\mathbf{v}}_1$ et après passage à la limite, $\overline{\Delta\mathbf{v}}_1$ est perpendiculaire à $\overline{\mathbf{v}}_0$ (qui est alors identique à $\overline{\mathbf{v}}_1$) ou $O'V_0$, c'est-à-dire tangent au cercle (H) (et toujours parallèle au rayon vecteur SM_1). Plus généralement, les changements de vitesse $\overline{\Delta\mathbf{v}}$ sont tangents à (H) et parallèles aux rayons vecteurs SM de la trajectoire correspondants.

Le **cercle** (H), qui est le lieu des points V tels que $\overline{\mathbf{O}'\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{v}}$ le vecteur vitesse de la planète, est l'**hodographe** du mouvement par rapport au point O' , qu'il ne faut pas confondre avec le centre du cercle.

Cette notion d'hodographe a été inventée et étudiée par William Rowan HAMILTON en 1846 [14]. C'est lui notamment qui a choisi son nom en combinant les deux mots grecs qui signifient « chemin » et « décrire ». Il fut aussi le premier à montrer que la loi de force centrale newtonienne peut être considérée comme étant la loi de l'hodographe circulaire. Et c'est cette propriété fondamentale qui va permettre la construction géométrique de la trajectoire.

4.3.2. À partir de la courbe lisse

Nous considérons tout d'abord une portion de l'orbite commençant au périhélie M_1 (cf. **Figure 7**). Nous savons qu'en ce point, la vitesse instantanée $\overline{\mathbf{v}}_1$ a la valeur maximale et est perpendiculaire au rayon vecteur SM_1 (ce qui n'était pas le cas avec le diagramme segmenté). La vitesse $\overline{\mathbf{v}}_2$ au point M_2 , atteint après que le rayon vecteur ait tourné de l'angle θ est, bien sûr, tangente à la trajectoire.

Soit un cercle, de centre O_H , que nous prendrons pour hodographe du mouvement étudié. La taille de cette image choisie arbitrairement définira l'échelle de la représentation des vitesses.

Nous commencerons par représenter la vitesse $\overline{\mathbf{v}}_1$. La position exacte de l'origine O' de l'hodographe n'est pas encore connue. Nous savons seulement que pour avoir $\overline{\mathbf{O}'\mathbf{V}}_1 = \overline{\mathbf{v}}_1$, c'est-à-dire, en particulier, la plus grande distance de O' à un point du cercle, il faut que $O'V_1$ passe par le centre O_H . $\overline{\mathbf{O}'\mathbf{V}}_1$ sera donc porté par la droite perpendiculaire à SM_1 et passant par O_H .

La représentation $\overline{\mathbf{O}'\mathbf{V}}_2$ de $\overline{\mathbf{v}}_2$, parallèle à la tangente en M_2 à l'orbite, va nous permettre de placer O' . Mais il nous faut situer exactement V_2 sur le cercle. Ce qui est immédiat lorsque l'on a réalisé que l'angle au centre $\angle V_1O_HV_2$ sur le diagramme des vitesses est égal à l'angle $\angle M_1SM_2 = \theta$ sur le diagramme de l'orbite. En effet, lors de la construction

donc bissectrice extérieure des rayons vecteurs MO'_H et MO_r , est bien tangente à l'ellipse en M .

On arrive ainsi, géométriquement, à partir d'un hodographe circulaire (H), de centre O_H , de rayon R_H et dont l'origine est à l'intérieur du cercle, à une ellipse. Un résultat qui nécessite quelques précisions. Mais on constate dès maintenant que le problème inverse de KÉPLER est résolu géométriquement.

4.5. À propos de la dernière construction de FEYNMAN

La dernière étape de la démarche de FEYNMAN, avec une rotation de 90° du diagramme des vitesses (H) et la construction de la trajectoire directement au-dessus de son transformé (H') est d'une très grande habileté. Elle revient à prendre le cercle (H') pour cercle directeur d'une ellipse (C_T) à laquelle on parvient ainsi sans détour.

Par référence aux notations de la **Figure 2**, les foyers de (C_T) sont le centre $O'_H \equiv F$ et l'origine $O_r \equiv F'$. Son cercle directeur (F) $\equiv (H')$. Ses grandeurs caractéristiques, évidentes, imposées par l'hodographe, sont égales à : $a = \frac{R_H}{2}$ et, δ étant la distance du centre O'_H à l'origine O_r ou encore $\delta = O'_H O_r$, $c = \frac{\delta}{2}$.

Nous avons placé le centre des forces en O'_H . La position du périhélie M_I sur le diagramme est imposée : il se situe au sommet A de l'ellipse. Il en résulte que cette dernière construction induit une nouvelle échelle de représentation des longueurs qui peut être définie à partir de la longueur, sur le diagramme, du segment SM_I . De plus, l'échelle de représentation des vitesses est inchangée. C'est donc l'unité de temps qui est modifiée, ce qui n'a aucun impact sur les directions et permet d'aboutir à une courbe correcte ou plus précisément à une ellipse homothétique de l'orbite d'origine.

4.6. La nature de la trajectoire en fonction de la position de l'origine de l'hodographe

On considère toujours un mouvement dont l'hodographe est circulaire. On sait que la loi de force centrale correspondante est newtonienne et donc que la trajectoire est une conique.

Nous venons de voir que si l'origine O' de l'hodographe est à l'intérieur du cercle, la trajectoire est elliptique. Si O' est au centre, c'est-à-dire confondu avec O_H les deux foyers de l'ellipse sont confondus et l'orbite est circulaire.

Si O' est sur le cercle ou à l'extérieur, on montre que la trajectoire est alors une parabole dans le premier cas, une hyperbole dans le second.

Sur la **Figure 11** par exemple, aux points $V_1 \dots V_i$ de (H) correspondent les points

$M_1 \dots M_i$ de la trajectoire. $O'V_1 \dots O'V_i$ sont parallèles aux vitesses instantanées en ces points et les angles tels que $\angle V_1 O_H V_i$ et $\angle M_1 S M_i$ sont égaux. Le point de contact de la tangente à (H) menée depuis O' est V_T . $O'V_T$ est parallèle à la vitesse instantanée \vec{v}_T en M_T . On sait également que le changement de vitesse $\Delta \vec{v}_T$ est tangent à (H) donc parallèle à \vec{v}_T . En ce point la direction de la vitesse ne change donc plus. C'est le point à l'infini dans la direction de l'asymptote d'une hyperbole avec $\angle M_1 S M_T = \angle V_1 O_H V_T = \alpha_a$.

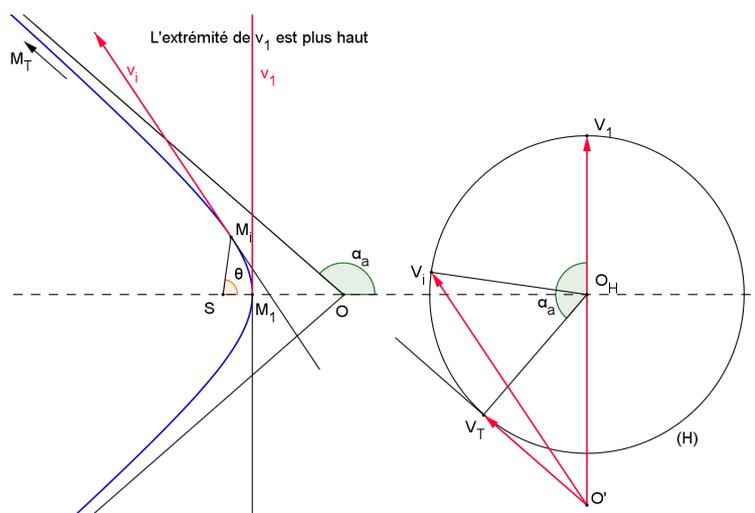


Figure 11 : Construction d'une trajectoire hyperbolique dans le cas où l'origine O' de l'hodographe (H) est à l'extérieur du cercle.

5. CONSTRUCTION DE LA TRAJECTOIRE À PARTIR DE L'HODOGRAPHE, mais en plaçant le centre des forces à l'origine de l'hodographe

Nous nous proposons de construire géométriquement la trajectoire, comme précédemment, à partir de l'hodographe, mais en plaçant le centre des forces S à l'origine O' et en utilisant la podaire⁽⁴⁾ de l'orbite par rapport au point S . Nous en déduisons une méthode plus générale de passage de l'hodographe à la trajectoire.

5.1. Le cas général

Nous considérons le mouvement d'un corps (de masse égale à l'unité) à accélération centrale, sans préciser l'expression de la force. S est le centre attractif, (C_T) est la trajectoire et (H) l'hodographe par rapport au centre S (cf. **Figure 12**).

\vec{SM} étant le rayon vecteur et \vec{v} le vecteur vitesse instantanée en M , le moment angulaire est égal à :

$$\vec{C} = \vec{SM} \times \vec{v} \quad (1)$$

et sa dérivée par rapport au temps,

$$\frac{d}{dt} (\vec{SM} \times \frac{d(\vec{SM})}{dt}) = \vec{SM} \times \frac{d^2(\vec{SM})}{dt^2} = \vec{0} \text{ puisque l'accélération et le rayon vecteur}$$

sont colinéaires. On en déduit que \vec{C} est constant, perpendiculaire aux rayons vecteurs et que le mouvement est plan (on écarte le cas $\vec{C} = \vec{0}$ qui correspond à un mouvement rectiligne). On

(4) Les podaires, bien que très utilisées par le passé, notamment par NEWTON, ont été un peu perdues de vue au cours des cinquante dernières années.

Les paramètres de (C_T) dépendent des conditions initiales à travers la constante C et de l'hodographe avec le rayon R_H et δ .

Remarquons de suite qu'au point V_i sur l'hodographe (H) , correspondent les points P_I , P et M sur respectivement (H') , (C_P) et l'orbite (C_T) avec le vecteur vitesse \vec{v} en M égal à $\overline{SV_i}$.

Il en est de même avec les points V_I , V'_I sur (H') et A qui est à la fois sur (C_P) et (C_T) , le vecteur $\overline{SV_I}$ étant égal à la vitesse \vec{v}_I en $A \equiv M_I$ qui est le périhélie et où nous savons que la vitesse est maximale : $SV_I = v_I = v_{max} = R_H + \delta$ (4).

Le moment angulaire peut se calculer en ce point : $\vec{C} = \overline{SM_I} \times \vec{v}_I$ ou encore, puisque \vec{v}_I est perpendiculaire à $\overline{SM_I}$: $C = SM_I \times v_I$ (5).

On a de la même façon, la vitesse minimale au point A' qui est l'aphélie :

$$v_{min} = R_H - \delta \text{ et, bien évidemment } v_{max} + v_{min} = 2R_H \quad (6).$$

La puissance de S par rapport au cercle (H') , égale à la puissance par rapport à l'hodographe, est égale à :

$$p_S = -v_{max} \cdot v_{min} = -(R_H^2 - \delta^2) \quad (7).$$

D'où :
$$\lambda_1 = \frac{C}{p_S} = -\frac{C}{R_H^2 - \delta^2} \quad (8).$$

Le demi-grand axe a est égal au rayon du cercle principal (C_P) , et avec la relation (3) :

$$a = \frac{C \cdot R_H}{R_H^2 - \delta^2} \quad (9).$$

La distance focale c est égale à SO , O étant le centre de (C_P) , image de O'_H centre de (H') . Sachant que $SO'_H = SO_H$, on en déduit :

$$\overline{SO} = \lambda_1 \cdot \overline{SO'_H} \quad \text{et} \quad c = \frac{C \cdot \delta}{R_H^2 - \delta^2} \quad (10).$$

Enfin,
$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{C}{\sqrt{R_H^2 - \delta^2}} \quad (11).$$

L'excentricité : $e = \frac{c}{a} = \frac{\delta}{R_H}$ et le paramètre : $p = \frac{b^2}{a} = \frac{C}{R_H}$ (12).

CONCLUSION

Nous venons de construire l'orbite d'un mouvement képlérien à partir de son hodographe en utilisant des transformations géométriques élémentaires et en passant par la podaire par rapport au centre des forces.

Nous disposons ainsi d'une méthode géométrique générale qui a l'avantage de conduire immédiatement à la trajectoire réelle, contrairement à la méthode de FEYNMAN.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] FEYNMAN R., GOODSTEIN D. et GOODSTEIN J., *Le mouvement des planètes autour du soleil*, coll. Le Sel et le Fer, Cambridge : Cassini, 2009.
- [2] NEWTON I., *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, Trad. La Marquise du Châtelet, Paris : Dunod, 2011.
- [3] CHAVE T. « Newton : le mouvement circulaire, l'approximation circulaire et la loi de la gravitation », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, juin 2012, vol. 106, n° 945, p. 663-680.
- [4] CHANDRASEKHAR S., *Newton's Principia for the Common Reader*, Oxford : Clarendon Press, 1995.
- [5] LAHAYE B., « De Képler à Newton... », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, novembre 2003, vol. 97, n° 858, p. 1389-1404.
- [6] NEEDHAM T., « Newton and the Transmutation of Force », *The American Mathematical Monthly*, février 1993, vol. 100, n° 2, p. 119-137.
- [7] DE GANDT F., « Le problème inverse (Principia, Liv. I, prop. 39-41) », *Revue d'Histoire des Sciences*, 1987, tome 40, n° 3-4, p. 281-309.
- [8] POURCIAU B., « Newton's Solution of the One-Body Problem », *Archive for History of Exact Sciences*, 1992a, 44, p. 125-146.
- [9] PANZA M., *Newton*, Paris : Les Belles Lettres, 2003.
- [10] ARNOL'D V. I., *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, Bâle : Birkhäuser Verlag, 1990.
- [11] LADEGAILLERIE Y., *Géométrie pour le CAPES de mathématiques*, Paris : Ellipses, 2002.
- [12] LESPINARD V. et PERNET R., *Géométrie Classe de Mathématiques Élémentaires*, Lyon : André Desvigne, 1962.
- [13] BECKMAN B., « FEYNMAN says : « NEWTON implies KÉPLER, no calculus needed ! » », *The Journal of Symbolic Geometry*, 2006, vol. 1.
- [14] HAMILTON W. R., « The hodograph, or a new method of expressing in symbolical language the newtonian law of attraction », *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 3 (1847), p. 344-353.